**E.T.S. DE INGENIEROS DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS**

**ANÁLISIS MATEMÁTICO. $2^{\underline{o}}$ CURSO Y ADAPTACIÓN 2009/2010**

# PRÁCTICA 2

## 2.1

(i) (a) Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorfa en un abierto $G \subseteq \mathbb{C}$ . Probar que el producto $uv$, de sus partes real e imaginaria, es una función armónica en $G$. Si dos funciones son armónicas ¿ lo es necesariamente su producto ?.

(b) Sea la función $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_0} & \text{si} \quad z \neq z_o \\ f'(z_o) & \text{si} \quad z = z_o \end{cases}$ siendo $f$ holomorfa en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$ tal que $z_o \in D$, se pregunta:
¿ Es la función $g$ continua en $z_o$ ?
¿ Es la función $g$ holomorfa en $D$ ? En caso afirmativo, obtener $g'(z)$ para $z \in D$.

(ii) Calcular la integral $I = \int_\gamma \frac{f(z)}{zg(z)}dz$, en donde $\gamma$ es un camino cerrado y simple (sin puntos dobles) recorrido una sola vez en el sentido positivo (contrario a la agujas del reloj) que limita un recinto $D$ que contiene el punto $z = 0$. Las funciones $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en $\mathbb{C}$. La $g(z)$ no se anula sobre $\gamma$ y sus ceros contenidos en $D$ son simples y distintos de 0.

(iii) Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función analítica en $\mathbb{C}$. Supongamos que $v(x,y) = h(u(x,y))$ siendo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$, con derivada continua. Demostrar que entonces $f(z)$ debe ser constante en $\mathbb{C}$.

(iv) Hallar todas las funciones holomorfas, $f(z) = f(x+iy)$, cuya parte real $u(x,y)$ sea de la forma $u(x,y) = \varphi(3x+5y)$ siendo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y con derivada segunda continua, a determinar. Expresar $f(z)$ en términos de $z$.

(v) Determinar una función holomorfa, si existe, tal que su parte real sea: $e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y) + \frac{x}{x^2+y^2}$.

## 2.2

Determinar el dominio de convergencia de las siguientes series funcionales:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n+1} z^{2n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz-1)^n}{2^{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2n}}{n 9^n \log^2(n+1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1+i)^{2n}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^{n!}}{n^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2in) z^n$$

## 2.3

(i) Justificar razonadamente donde es derivable la función $f(z) = \log(2 + 2z - z^2)$ y hallar, si existe, el desarrollo de la misma en serie de potencias positivas de $z$, determinando el disco de convergencia de la serie obtenida.

(ii) La función $f(z) = (\log(1-(1-i)z))/z$ no está definida en el punto $z = 0$ pero se puede convertir en una función holomorfa en un entorno de $z = 0$ dando a $f(0)$ un valor adecuado, en este caso la derivada décima de $f(z)$ en el punto $z = 0$ vale:

A : $2^5 10!(1+i)/11$ B : $-2^5 10!(1+i)/11$ C : $2^5 10!(1-i)/11$
D : $-2^5 10!(1-i)/11$ E : $2^5(1+i)^{10}/10!$ F : no existe

## 2.4

(i) Sobre la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sabemos que converge en $z_0 \neq 0$. ¿ Qué relación existe entre el radio de convergencia de la serie y $|z_0|$ ?

(ii) Desarrollar $f(z) = \dfrac{4z+5}{z+1}$ y $g(z) = \dfrac{4z+5}{(z+1)^2}$, en potencias positivas de $z-1$ y determinar sus dominios de convergencia.

(iii) Sea $f(z) = \dfrac{5z}{(z+i)^2}$, obtener el desarrollo de $f$ en serie de potencias positivas de $z-1$ y en serie de potencias negativas de $z+i$. ¿ Cúal es el valor de $f^{(10}(1)$ ?

(iv) Desarrollar la función $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-1}$ en serie de Laurent en las regiones: $A = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ y $B = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z+1| < 2\}$.

(v) Obtener el desarrollo de Laurent de $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-z}$, válido en $1 < |z-i| < \sqrt{2}$.

## 2.5

(i) Designamos por $S(z)$ a la función definida por la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n z^{n+1}$ en su disco de convergencia. Se pide:

(a) Calcular el radio de convergencia de la serie de potencias y su suma.

(b) Sea $f(z)$ la función analítica que coincide con $S(z)$ en su disco de convergencia. Determinar el lugar geométrico de los puntos $z$ que se transforman mediante $f(z)$ en la circunferencia de centro 0 y radio $\frac{1}{2}$.

(c) Desarrollar $f(z)$ en serie de potencias positivas de $z-i$.

(d) Calcular $\int_\gamma f(z)dz$, siendo $\gamma(t) = e^{it}$ , $t \in [0, 2\pi]$.

(ii) Obtener el desarrollo de Laurent de $f(z) = -\dfrac{\operatorname{senh}(z)}{z^3}$ en $0 < |z| < \infty$ y de $f(z) = \dfrac{z^2 - 2iz + 1}{z^5 - 2iz^4 - z^3}$ en $0 < |z| < 1$.

## 2.6

Dada las series de Laurent: $f_1(z) = \displaystyle\sum_{-\infty<n<\infty} \frac{1}{(2i)^{|n|}} z^n$ ; $f_2(z) = \displaystyle\sum_{-\infty<n<\infty} (2i)^{|n|} z^n$ , determinar sus dominios de convergencia (coronas) y el valor de $\int_\gamma f_k(z)dz$ ; $\gamma = e^{it}$ , $0 \leq t \leq 2\pi$ , para $k = 1, 2$, en caso de convergencia de la serie correspondiente.

## 2.7

Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ convergente en $0 < |z-z_0| < R$ y sea $\gamma(t) = z_0 + \frac{R}{2}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Calcular razonadamente $I_k = \int_\gamma (z-z_0)^k f(z)dz$ para todo $k$ entero (positivo y negativo).

## 2.8

(i) Dada la función $f(z) = \begin{cases} \frac{2\operatorname{sen}(z)}{z} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$ . Demostrar que es holomorfa en algún entorno de $z = 0$ y hallar las expresiones de $f'(z)$ y $f''(z)$. Desarrollarla en serie de potencias positivas de $z$, y calcular su radio de convergencia.

(ii) Calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$, si $B_n$ es la enésima derivada en $z=0$ de la función $f(z) = \begin{cases} \frac{z}{e^z-1} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$

**2.9**

Obtener todas las representaciones posibles de la función:

$$f(z) = \frac{3z+1}{(1-z)(z+3)}$$

en serie de Laurent de potencias de $z$, estudiando los distintos dominios de convergencia.

**2.10**

(i) Justificar razonadamente que las series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(2+2i)}{2^n}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ni^n}{2^n}$ son convergentes. Obtener, en cada caso, el número complejo resultado de dicha suma, escrito en forma binómica.

(ii) Obtener la suma y el dominio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}}(z+4i)^n$.

(iii) Desarrollar $g(z) = \frac{z}{z^2-3z+2}$ en serie de potencias positivas en un entorno de $z=3$ y en serie de Laurent en $|z-2| > 1$.

(iv) Expresar la función $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}} + e^z - 1}{z}$ en serie de Laurent en $0 < |z| < \infty$.

**2.11**

Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(3n+1)}(z+i)^{n^2}$$

(i) Determinar su dominio de convergencia.

(ii) Si $f(z)$ designa la función analítica definida por la serie en su dominio de convergencia y $f^{iv}(z)$ su derivada cuarta, calcúlese:

$$\int_\gamma \frac{f^{iv}(z)}{z^2+1} dz \quad \text{con} \quad \gamma(t) = -i + \frac{1}{2}e^{it}\ , \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

**2.12**

Se define la función $f : \underset{a}{\mathbb{C}} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{f(a)}{\mathbb{C}}$ mediante la fórmula $f(a) = \int_\gamma z^2 dz$ siendo $\gamma$ el camino con origen en 0 y final en $a$. Se pide:

(i) Demostrar que la integral no depende del camino elegido.

(ii) Calcular $f(i)$ y $f'(i)$.